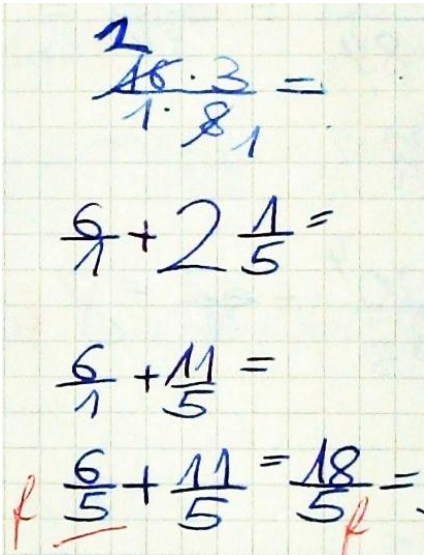
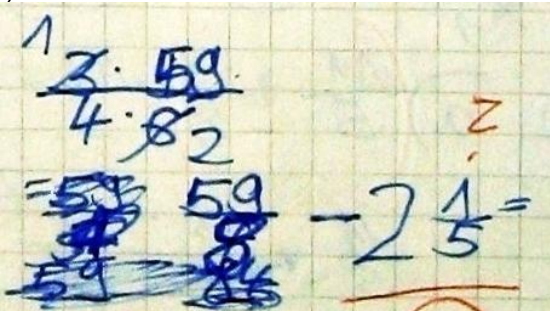


## Stichworte zum Gleichheitszeichen

### 1 Beispiele

Obwohl das Gleichheitszeichen als sinngebendes Symbol von zentraler Bedeutung für die Mathematik ist, wird das Gleichheitszeichen in Hausaufgaben, Klassenarbeiten und Tests oft fehlerhaft verwendet. So werden z. B. Nebenrechnungen nicht extra gekennzeichnet, sondern durch Gleichheitszeichen miteinander verknüpft:

<p>Patrik<sup>[1]</sup>: Aufgabe 3a und 3b aus einer Klassenarbeit, die am 11. Februar 2009 in einer 6. Grundschulklasse geschrieben wurde<sup>[2]</sup></p>	
<p>3. a) Multipliziere 16 mit <math>\frac{3}{8}</math> und addiere <math>2\frac{1}{5}</math>. b) Subtrahiere das Produkt aus <math>\frac{3}{4}</math> und <math>9\frac{5}{8}</math> von <math>10\frac{1}{2}</math>.</p>	
<p>3a)</p> 	<p>Bei Aufgabe 3a hat Patrik falsch erweitert. In der letzten Zeile hätte <math>\frac{30}{5}</math> anstelle von <math>\frac{6}{5}</math> stehen müssen. Zu Recht wurde hier das „f“ eingetragen.</p> <p>Nicht gekennzeichnet wird dagegen die falsche Verwendung des Gleichheitszeichens in der ersten Zeile. Dies müsste keineswegs mit Punktabzug betrafft werden. Das Kind sollte aber auf diesen, aus Sicht der Mathematik gravierenden Fehler hingewiesen werden, so wie ja auch in einer Mathematik-Arbeit auf Rechtschreibfehler aufmerksam gemacht wird.</p>
<p>3b)</p> 	<p>Bei Aufgabe (3b) zeigt sich das gleiche Bild: Die fehlerhafte Verwendung des Gleichheitszeichens zu Beginn der 2. Zeile wird nicht gekennzeichnet. Dass Patrik anstelle von <math>10\frac{1}{2}</math> versehentlich die Zahl <math>2\frac{1}{5}</math> von Aufgabe 3a übernommen hatte, wird dagegen mit Punktabzug bedacht.</p>

Angesichts der geringen Bedeutung, die das Gleichheitszeichen im Fach Mathematik in vielen Grundschulklassen hat, wird es konsequenterweise auf folgendem Arbeitsblatt ganz weggelassen. Hinz kommt, dass für die schriftliche Darstellung der Rechenwege wieder einmal kein Platz vorgesehen ist:

Thomas, 4. Klasse, Übungsblatt

04.12.2009

1] Die Namen der Kinder wurden hier aus Datenschutzgründen geändert.  
2] Da die Kopien aus Schülerarbeiten mit einer Digitalkamera hergestellt wurden, sind viele Aufnahmen zu den Rändern hin etwas verzerrt und farbstichig.

Punktrechnung vor Strichrechnung  
Rechne im Kopf! (Tipp: Unterstreiche immer die Teilaufgabe, mit der du beginnst.)

$8 + 3 \cdot 9$	$35 \checkmark$	$560 : 10 + 9$	$56 \checkmark$	$450 : 9 + 4$	$54$
$6 \cdot 9 - 50$	$4 \checkmark$	$110 + 36 : 4$	$110 \checkmark$	$206 - 6 \cdot 7$	$164$
$30 + 7 \cdot 7$	$79 \checkmark$	$900 : 3 - 2$	$300 \checkmark$	$400 + 4 : 4$	$401$
$5 \cdot 5 - 16$	$9 \checkmark$	$280 - 28 : 7$	$376 \checkmark$	$190 \cdot 2 - 23$	$378$

4, 9, 35, 54, 65, 79, 119, 164, 276, 298, 378, 401

Weil der korrekte Einsatz des Gleichheitszeichens in den ersten 6 Grundschuljahren unzureichend behandelt wurde und weil eine falsche Anwendung des Gleichheitszeichens in Klassenarbeiten und Tests nicht korrigiert wurde, hat Susanne nun in der 7. Klasse Schwierigkeiten, Lösungswege angemessen darzustellen:

Susanne, 7. Klasse, Übungsblatt	17.12.2010
12 Kiwis kosten 1,80 €. a) Was zahlt man für 20 Kiwis? b) Wieviel Kiwis erhält man für 3 €?	
$1,80€ : 12 = 0,15€$ $20 = 3€ = 20 \text{ Kiwis kosten } 3€$ .	

Die Abbildung zeigt den Ausschnitt aus einem Übungsblatt zum Thema „Dreisatz“. Auf engem Raum in kleiner Schrift mit Füller geschrieben sind die Rechenschritte nur schwer zu interpretieren. Die von Hand geschriebene Zeile hat folgenden Inhalt:

$$1,80€ : 12 = 0,15€ \cdot 20 = 3€ = 20 \text{ Kiwis kosten } 3€$$

Nebenrechnungen werden nicht als solche gekennzeichnet, sondern durch Gleichheitszeichen mit einander verbunden. Das Gleichheitszeichen bedeutet hier soviel wie „daraus folgt“ oder „nun kommt der nächste Schritt“.

Weil die korrekte und eindeutig interpretierbare schriftliche Darstellung von Rechenwegen in vielen Grundschulklassen vernachlässigt wird, haben Schüler immer wieder große Probleme im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II (Hagemeister 2010). Dies illustriert die Kopie einer Hausaufgabe, die Raphael im ersten Halbjahr der 8. Klasse angefertigt hatte:

Raphael, 8. Klasse, Übungsblatt,

12.11.2008

Handwritten work on grid paper showing a system of linear equations and an incorrect solution process:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -4x - 2 = -2y \\ \text{II} \quad -2y = 6x - 12 \end{array}$$


---


$$\text{I} = \text{II} : x = \cancel{-10} - 4x - 2 + 6x - 12 \quad | +12$$

$$\quad \quad \quad -4x - 2 + 6x = +12 \quad | +2$$

$$\quad \quad \quad -4x + 6x = 14$$

$$\quad \quad \quad -10x = 14 \quad | :10$$

$$\quad \quad \quad \underline{x = 24}$$

Das Gleichheitszeichen hätte in der 3. Zeile zwischen  $-2$  und  $+6x$  stehen müssen. Das Gleichheitszeichen, das stattdessen in der 3. Zeile bei  $x =$  steht, wird hier in einer dem Doppelpunkt verwandten Bedeutung benutzt. Es besagt offenbar soviel wie

„nun wird  $x$  berechnet.“

Auch in der 4. Zeile steht das Gleichheitszeichen an der falschen Stelle, was zum falschen Resultat führt. Nicht  $x = 24$ , sondern  $x = 1$  ist die richtige Lösung:

Korrekt wäre in der 3. und in den nachfolgenden Zeilen gewesen:

$$\text{Gl. I} = \text{Gl. II:} \quad -4x - 2 = 6x - 12 \quad | +4x + 12$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wird  $4x + 12$  addiert, um dem Ziel, dass  $x$  alleine auf einer Seite steht, näher zu kommen. Man erhält nun

$$\begin{array}{l} 10 = 10x \quad | :10 \\ x = 1 \end{array}$$

Am Beispiel von Raphael wurde schon dargestellt, welche große Probleme viele Kinder in der Sekundarstufe haben, weil sie in der Grundschule nicht gelernt haben, Rechenwege übersichtlich und lesbar aufzuschreiben und das Gleichheitszeichen zutreffend anzuwenden (Hagemeister 2010). - Raphael besucht inzwischen die 10. Klasse an einer Brandenburger Gesamtschule. Mittlerweile ist Raphael deutlich sicherer in der mathematik-gemäßen Darstellung von Rechenwegen. Die nächste Abbildung enthält eine Aufgabe zum Thema „Lineare Gleichungssysteme“ aus einem Übungsblatt, das in Raphaels Schule im Februar 2011 zur Vorbereitung auf die Prüfung am Ende der Jahrgangsstufe 10 eingesetzt wurde:

Raphael, 10. Klasse, Übungsblatt, Aufgabe 2		25.02.2011
<u>I</u> $2x + 2y = 12 \quad   :2$	$x = 4$ in Gl. I:	
<u>II</u> $3x - 3y = 6 \quad   :3$	$2 \cdot 4 + 2y = 12 \quad   :2$	
	$4 + y = 6 \quad   -4$	
	<u><math>y = 2</math></u>	
<u>I</u> $x + y = 6$		
<u>II</u> $x - y = 2$		
<u>I</u> + <u>II</u> : $2x = 8 \quad   :2$	<u>Probe:</u>	
<u><math>x = 4</math></u>	Gl. I: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 12$ (ee)	
	Gl. II: $3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6$ (ee)	

Das Gleichheitszeichen ist Dreh- und Angelpunkt bei dieser Aufgabe. Wichtig ist ferner die (kurze) Kommentierung aller Rechenschritte. - Hier stehen keine Nebenrechnungen auf irgendeinem Schmierzettel. Alle Rechenschritte sind Bestandteil der übersichtlichen schriftlichen Darstellung des Lösungsweges.

## 2 Ursachen für die Vernachlässigung des Gleichheitszeichens in der Grundschule

Das Gleichheitszeichen spielt bei den Rechenmethoden, die im Mathematikunterricht der Grundschule traditionsgemäß behandelt werden, nur eine untergeordnete Rolle:

Die „vier Rechenmethoden“ der Grundschule sind „Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner“. (Krauthausen, 1993)

„Bekanntlich unterscheidet man zwischen mündlichem Rechnen, bei dem sämtliche Schritte zur Lösung einer Aufgabe ohne Notation erfolgen, halbschriftlichem Rechnen, bei dem die Teilrechnungen aufgeschrieben, sowie schriftlichem Rechnen, bei dem die Ergebnisse nach festgelegten Regeln (Algorithmen) ziffernweise ermittelt werden.“ (Selter, 2003)

Es besteht in der fachdidaktischen Diskussion weitgehend Einigkeit dahin, „dass der mathematisch weiterführende Rechentyp keineswegs das schriftliche, sondern das halbschriftliche Rechnen ist“ (Wittmann/Müller, 1992, S. 134).

Zu der Divisions-Aufgabe (522:3) ist in einem Grundschullehrplan eine „halbschriftliche“ Notation abgedruckt (Bayern, 2000):

$$\begin{array}{r}
 522:3 = 174 \\
 300:3 = 100 \\
 222 \\
 210:3 = 70 \\
 12:3 = 4
 \end{array}$$

Zur Verteidigung dieser unkommentierten Auflistung von Nebenrechnungen und Zahlen könnte man anführen, dass die Notizen, die in Grundschulklassen beim „gestützten (»halbschriftlichen«) Kopfrechnen“ aufgeschrieben werden, lediglich das Arbeitsgedächtnis des rechnenden Kindes entlasten sollen. Demnach würden diese Notizen nicht für andere angefertigt und bedürften deshalb weder der Kommentierung noch sei Schönschrift erforderlich. Entsprechend werden auch heute noch bei Mathematikarbeiten in der Grundschule Schmierzettel mit Nebenrechnungen gefüllt, die kaum lesbar sind und die den Aufgaben, die bearbeitet wurden, gar nicht oder nur schwer zugeordnet werden können. Dieses „halbschriftliche Rechnen“ sollte abgelöst werden durch eine mathematisch korrekte, nicht-verkürzte Darstellung der Rechenwege. Anstelle der oben wiedergegebenen „halbschriftlichen“ Notation zu der Divisions-Aufgabe  $522:3$  würde man dann z. B. folgende Rechenschritte aufschreiben:

$$\begin{aligned} 522:3 &= (300 + 210 + 12):3 \\ &= 300:3 + 210:3 + 12:3 \\ &= 100 + 70 + 4 = 174 \end{aligned}$$

Auch andere Zerlegungen sind möglich:

$$\begin{aligned} 522:3 &= (600 - 60 - 18):3 \\ &= 600:3 - 60:3 - 18:3 \\ &= 200 - 20 - 6 = 174 \end{aligned}$$

Eine solche nicht-verkürzte schriftliche Darstellung von Rechenwegen hat gegenüber dem heute noch in deutschen Grundschulklassen praktiziertem „halbschriftlichem Rechnen“ bedeutende Vorteile:

- Bei jedem Rechenschritt ist der Zusammenhang mit der ursprünglichen Aufgabe unmittelbar ablesbar. Dies könnte die Ursache dafür sein, dass auch Kinder mit „Rechenschwäche“ von dieser nicht-verkürzten schriftlichen Darstellung der Rechenwege profitieren.
- Die Rechenschritte werden für andere nachvollziehbar, unter korrekter Verwendung des Gleichheitszeichens aufgeschrieben. Grundschul Kinder werden damit besser auf den Unterricht in der Sekundarstufe I und II vorbereitet, wo die kompetente Anwendung des Gleichheitszeichens unverzichtbar ist, z. B. beim Lösen von Gleichungssystemen.
- Ein Test, bei dem Rechenschritte ausführlich und zusammenhängend dargestellt werden, liefert eher Anhaltspunkte für eine Fehleranalyse als wenn nur Endergebnisse aufgeschrieben werden, denn am Rechenweg lässt sich in der Regel ablesen, an welcher Stelle ein Fehler gemacht wurde.

Zu der Subtraktionsaufgabe  $701 - 698$  führt Selter (2003, Abschnitt 2) u. a. folgende „halbschriftliche“ Notation an:

$$\begin{aligned} 701 - 600 &= 101 \\ 101 - 90 &= 11 \\ 11 - 8 &= 3 \end{aligned}$$

Bei einer solchen nicht erläuterten Aneinanderreihung von Haupt- und Nebenrechnungen kann das Gleichheitszeichen widerspruchlos mit der Bedeutung „es folgt“ oder „nun kommt der nächste Schritt“ assoziiert werden. Deshalb ist es nicht überraschend, dass viele Grundschul Kinder nicht wissen, dass z. B. folgende Schreibweise unzulässig wäre:

$$701 - 698 = 701 - 600 = 101 - 90 = 11 - 8 = 3$$

### 3 Literatur

Bayern (2000): *Grundschul Lehrplan, Jahrgangsstufe 4*, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung

<http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=219edd960f1b498bb20c364f99ac88da>

Hagemeister, Volker (2010): *Eine Dokumentation: Unterrichtsmethoden, die Schwierigkeiten im Rechnen entstehen lassen*, Heilpädagogik online 01/10, S. 74-90.

[http://heilpaedagogik-online.com/2010/heilpaedagogik\\_online\\_0110.pdf](http://heilpaedagogik-online.com/2010/heilpaedagogik_online_0110.pdf)

Krauthausen, Günter (1993): *Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden.*- In: Journal für Mathematik-Didaktik 3/4, S. 189-219.

<http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Personal/Krauthausen/JMD93.pdf>

Selter, Christoph (2003): *Flexibles Rechnen – Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele.* Sache, Wort, Zahl, SWZ 31, 57, S. 45-50

<http://pikas.mathematik.tu-dortmund.de/selter/upload/material/Aufsätze-CS-Scans/Flexibles%20Rechnen.pdf>

Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart (zit. nach Krauthausen 1993)